

文章编号: 1000-8055(2006)05-0879-05

结构动力响应精细积分级数解的 并行计算

李渊印¹, 金先龙¹, 张晓云¹, 李根国²

(1. 上海交通大学 高性能计算中心, 上海 200030; 2. 上海超级计算中心, 上海 201203)

摘 要: 讨论了精细积分法的存储需求问题, 指出级数解更适合计算大型结构的动力响应分析。研究了精细积分法级数解的并行计算, 精细积分法的时程积分公式包含两项, 采用第一项串行、第二项并行的并行算法对精细积分级数解实施并行计算, 给出了相应的实现流程。讨论了并行算法的负载分配策略, 为减少处理器等待初值的时间, 对时间步数实施非平均分配。算例表明, 并行算法具有好的加速比。

关 键 词: 航空、航天推进系统; 动力响应; 精细积分; 级数解; 并行算法

中图分类号: O322; TB122

文献标识码: A

Parallel computing of series solution of precise integration for structural dynamic response

LI Yuan-yin¹, JIN Xian-long¹, ZHANG Xiao-yun¹, LI Gen-guo²

(1. High Performance Computing Center,

Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China;

2. Shanghai Supercomputer Center, Shanghai 201203, China)

Abstract: Storage requirements of precise integration method were discussed. Series solution of the method suits dynamic response analysis of large-scale structures much better than other methods. Parallel computing of series solution has been researched and implemented. Time integration of precise integration method includes two items. The first item was computed serially and the second item was computed in parallel. Then a corresponding flow-chart was given. Load distributed strategies were discussed for the parallel algorithm. The unbalanced distribution of time steps was implemented. The strategy can decrease the waiting time of the initial value for each processor. The final example shows that parallel algorithm of series solution has high speedup.

Key words: aerospace propulsion system; dynamic response; precise integration; series solution; parallel algorithm

文献[1]中提出的精细积分法, 由于其数值结果的高度精确, 已经在结构动力分析^[2]、优化控

制^[3]、偏微分方程的精细求解^[4]、非稳态随机动力学^[5]等领域得到了广泛应用。

求解大型结构动力响应问题非常耗时, 发展

收稿日期: 2005-08-08; 修订日期: 2006-09-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60273048)

作者简介: 李渊印(1975-), 男, 山东东平人, 上海交通大学高性能计算中心, 博士, 主要从事结构分析、并行计算研究。

相应的并行算法成为必然。精细积分法的主要运算是矩阵向量运算,与传统的积分方法相比更适用于并行计算,一些研究者发展的精细积分并行算法,对时间步实施粗粒度并行化,通讯量低,获得了很好的并行效率^[6-8]。

对大型结构进行动力响应分析,存储空间是一个必须考虑的问题。精细积分法得到的时程积分公式包含两项:第一项是指数矩阵向量乘;第二项为积分项。对于任意载荷,可采用载荷分段线性化^[11]、Fourier 展开^[6]、直接积分^[7]等方法得到第二项的数值结果。前两种方法需要矩阵求逆,第三种方法则是借助指数矩阵(不同于第一项中的指数矩阵)完成的,逆矩阵和指数矩阵都是满阵,需要大量的存储空间。采用精细积分法的级数解^[9]可以避免第二项中的满阵,该方法针对非线性结构动力方程的求解而提出,也可直接应用于线性情况,而且更简化,第二项求解仅与状态矩阵有关,而状态矩阵是稀疏的。

本文讨论了精细积分法的级数解及其并行算法,讨论了合适的负载分配策略,最后进行了算例验证。

1 结构动力方程的积分

结构动力响应的基本方程为:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\ddot{x}(t)$, $\dot{x}(t)$ 和 $x(t)$ 分别是加速度、速度和位移向量, M , C , K 和 $f(t)$ 分别是质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和节点载荷向量。

通过引入对偶变量^[11],可以将(1)式转化成状态方程,但此时得到的状态矩阵未必稀疏。为此,首先在(1)式两端同时乘以 M^{-1} 并移项,

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= -M^{-1}C\dot{x}(t) - \\ &M^{-1}Kx(t) + M^{-1}f(t) \end{aligned} \quad (2)$$

引入变换^[10], (2)式可以写成状态方程形式:

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = H v(t) + r(t) \\ v(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (3)$$

在有限元方法中,可以采用集中质量矩阵,此时 M 和 M^{-1} 为对角阵。又 K 和 C 稀疏且对称,故 $M^{-1}K$ 和 $M^{-1}C$ 也稀疏,从而状态矩阵 H 稀疏。

(3)式的解为:

$$v(t) = T(t - t_0) v_0 + \int_{t_0}^t T(t - z) r(z) dz \quad (4)$$

其中 $T(a) = \exp(aH)$, 文献[1]中给出了 $T(t - t_0)$

的精细求解方法。

在数值计算中,若把载荷作用的时间域 $[t_0, t_n]$ 划分成 N 等份,各分点 $t_k = k\tau$, 这里 τ 为时间步长,有 $\tau = (t_n - t_0)/N, k = 0, 1, \dots, N$, 上式可写成:

$$v_k = T(\tau) v_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} T(t_k - z) r(z) dz \quad (5)$$

其中, $k = 1, 2, \dots, N$ 。

2 精细积分级数解

为了对(5)式进行积分,将 $r(t)$ 在 t_{k-1} 处展开成 $(t - t_{k-1})$ 的 Taylor 级数,连同指数矩阵的无穷矩阵级数一起代入(5)式右端第二项,进行积分并整理^[9]可最后得到时程积分公式

$$v_k = T(\tau) \left[v_{k-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \tau^{m+j+1} H^m}{j! m! (m+j+1)} r_{k-1}^{(j)} \right] \quad (6)$$

利用(6)式和初值 v_0 , 可逐步求出各时刻的状态向量 v_k , 无需回代。文献[9]中已对该算法的误差进行了讨论,并给出了提高计算精度的合理做法,这些同样适用于(6)式。(6)式中 $r_{k-1}^{(j)}$ 为一元函数,文献[9]中 $f_{(k)}^{(j)}$ 为二元函数,因而(6)式在处理和实现上更加简洁。

3 精细积分级数解的并行计算

3.1 并行算法描述

级数解和直接积分法的时程积分公式的差异,仅在于第二项求解,故可采用相同的并行算法^[9]。分析(6)式,第一项计算很简单,只是一次矩阵向量乘。第二项计算相对复杂,但与状态向量 v 无关,各时间步的该项积分是相互独立的,可由多个处理器独立并行计算。并行算法描述为:首先并行计算所有时间步的第二项,之后串行计算时程积分,即先计算第一项,再加上已算得的第二项。

3.2 负载分配策略

并行是针对第二项的,每一时间步的第二项积分的计算量相当,因此将时间步数均分可达到负载均衡。设处理器数为 p , 总时间步数为 N , 将 N 分成 p 组,每组 N_i 步, $i = 1, 2, \dots, p$ 。 N_i 的算法为:

$$\begin{cases} N_i = M + 1 (\text{当 } i \leq L \text{ 时}) \\ N_i = M (\text{当 } i > L \text{ 时}) \end{cases} \quad (7)$$

其中, $M = \lfloor N/p \rfloor$, $L = N - M * p$, 这里 $\lfloor \cdot \rfloor$ 是取下整函数。记 $N_0 = \sum_{j=1}^{i-1} N_j$, 第 i 号处理器负责第 i 组

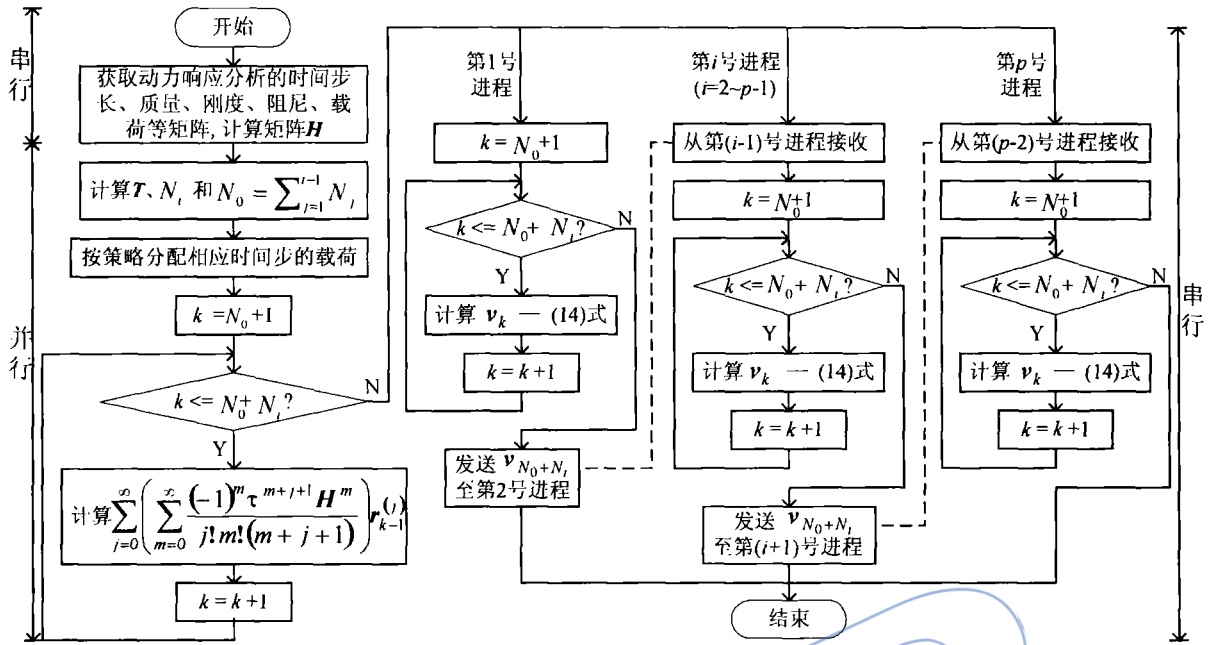


图 1 级数解并行计算的流程图

Fig. 1 Flowchart of parallel computing for series solution

积分,即 N_i 个时间步 $[t_{k-1}, t_k]$ 的积分,这里 $k = N_0 + 1, N_0 + 2, \dots, N_0 + N_i$ 。

上述分配策略虽能达到负载平衡,但从整个过程来看是不合适的。各处理器完成 N_i 个第二项积分的时间基本相等,接下来串行计算时程积分时各处理器(分得初始时间步的第 1 号处理器除外)必须等待初值 v_{N_0} 完成(第 i 号处理器的初值由第 $(i-1)$ 号处理器算出),这将增加整体计算时间。

为避免处理器等待初值,对时间步数实施非平均分配,从而提高整体并行效率,基本思想是:对第 i 号处理器分配以较多的时间步,使得该处理器完成 N_i 个第二项的积分时,第 $(i-1)$ 号处理器能基本上完成 N_{i-1} 个时程积分(包含 2 项);此时第 i 号处理器所需的初值 v_{N_0} 可即时获得,不必等待。

上述策略的具体实现方法为:对于给定问题,先进行一步时程积分,记第一项计算时间为 t_1 ,第二项计算时间为 t_2 ,则分配以第 i 号和第 $(i-1)$ 号处理器的时间步数应近似满足:

$$N_{i-1}(t_1 + t_2) \approx N_i t_2 \quad (8)$$

整数 N_{i-1}, N_i 和 m' 不一定绝对满足(8)式,故用 $\approx$ 。记 $\beta = t_2 / (t_1 + t_2)$,有 $N_{i-1} \approx \beta N_i$,又 $\sum_{i=1}^p N_i = N$,可得到:

$$N_p [1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{p-1}] \approx N \quad (9)$$

由等比数列求和求得 N_p 后,再结合(8)式求出 $N_i, i = 2, \dots, p-1$ 。这里求出的 N_i 不一定是整

数,需进行取整。为满足 $\sum_{i=1}^p N_i = N$,当 $N_i (i = 2, \dots, p)$ 求出后,得 $N_1 = N - \sum_{i=2}^p N_i$ 。并行计算的流程见图 1 所示。

4 数值算例

算例:取一矩形薄壳结构,其有限元模型如图 2 所示,四角固支,壳上某点作用一集中力 p 。

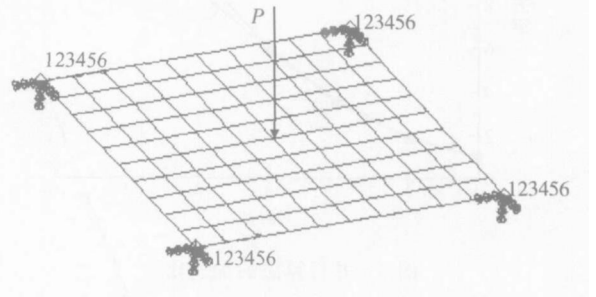


图 2 薄壳有限元模型

Fig. 2 The finite element model of a thin shell

划分单元后得到结构动力方程的阶数为 105,离散总步数 $N = 3000$,时间步长 $\tau = 0.05$ s。并行算法在上海超级计算中心的“神威 I”超级计算机上实现,其中指数矩阵以及时程积分第一项的求解采用了系统自带的计算库。“神威 I”超级计算系统的主要参数为:处理器主频 500 MHz,384 个处理器,主存容量 48 GB,磁盘容量 1.28 TB,系统峰值为定点(384 GIPS)和浮点(384

GFLOPS)。

根据前面的并行算法描述,串行计算量占总计算量的比重为 $\alpha = t_1 / (t_1 + t_2)$ 。由加速比的 Amdalh 定律,并行算法的理想加速比 S_p^* 为

$$S_p^* = 1 / [\alpha + (1 - \alpha) / p] = p(t_1 + t_2) / (pt_1 + t_2) \tag{10}$$

其中, p 为处理器数目。取 $\max(j) = 1, \max(m) = 30$, 经时间统计, $t_2 \approx 21t_1$, 由上式可求得并行算法的理想加速比 S_p^* 。

加速比 S_p 的定义为 $S_p = t / t_p$, 其中, t 为串行计算时间, t_p 为采用 p 个处理器并行计算同一问题的时间。并行效率是衡量并行计算效果的另一指标, 其定义为 $\phi_p = S_p / p \times 100\%$ 。表 1 中给出了并行计算的时间和效率。

表 1 并行计算时间和效率

Table 1 Time and efficiency of parallel computing

p	1	2	4	8	16	32
时间/s	93.710	49.142	26.842	15.887	10.644	8.638
$\phi_p/\%$	100.00	95.35	87.28	73.74	55.03	33.90

由上表数据计算加速比 S_p 和理想加速比 S_p^* , 并绘制加速比曲线如下:

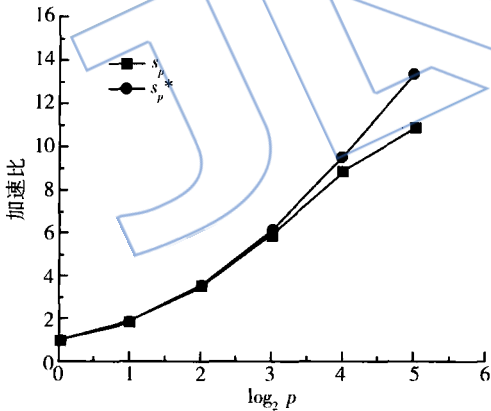


图 3 并行算法的加速比

Fig. 3 Speedup of the parallel algorithm

由图 3 可见,并行算法具有良好的加速比和可扩展性,接近于其理想加速比。算法的正确性已在文献[9]中得到了验证。

5 结束语

除指数矩阵外,精细积分法的级数解只与稀疏的状态矩阵有关,相对于载荷分段线性化、Fourier 展开、直接积分等方法,更适合于计算大型结构的动力响应分析。

精细积分法的时程积分公式包含两项,本文采用第一项串行、第二项并行的并行算法对精细积分级数解实施并行计算,给出了相应的实现流程。算法虽是部分并行的,但它对时间步实施任务划分,各步运算相互独立,是粗粒度并行算法,通讯量很低。另外,对时间步进行非平均分配,避免处理器等待初值。获得的并行算法加速比接近于其理想加速比。

参考文献:

[1] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131-136.
Zhong Wanxie. On precise time-integration method for structural dynamics[J]. Journal of Dalian University of Technology, 1994, 34(2): 131-136.

[2] 钟万勰. 暂态历程的精细计算方法[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(1): 1-6.
Zhong Wanxie. Precise computation for transient analysis[J]. Computational Structural Mechanics and Applications, 1995, 12(1): 1-6.

[3] 钟万勰. 矩阵黎卡提方程的精细积分法[J]. 计算结构力学及其应用, 1994, 11(2): 113-119.
Zhong Wanxie. The Precise integration for matrix Riccati equations[J]. Computational Structural Mechanics and Applications, 1994, 11(2): 113-119.

[4] 钟万勰. 子域精细积分及偏微分方程数值解[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(3): 253-260.
Zhong Wanxie. Subdomain precise integration method and numerical solution of partial differential equations[J]. Computational Structural Mechanics and Applications, 1995, 12(3): 253-260.

[5] 林家浩, 钟万勰, 张文首. 结构非平稳随机响应方差矩阵的直接精细积分计算[J]. 振动工程学报, 1999, 12(1): 1-8.
Lin Jiahao, Zhong Wanxie, Zhang Wenshou. Precise integration of the variance matrix of structural non-stationary random responses[J]. Journal of Vibration Engineering, 1999, 12(1): 1-8.

[6] Shen Weiping, Lin Jiahao, Williams FW. Parallel computing for the high precision direct integration method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, 126: 315-331.

[7] 沈为平, 宋华茂. 任意荷载作用下结构动力响应的并行算法[J]. 振动工程学报, 1996, 9(4): 333-340.
Shen Weiping, Song Huamao. High precision direct integration method for structures subjected to arbitrary dynamic loading and its parallel implementation[J]. Journal of Vibration Engineering, 1996, 9(4): 333-340.

[8] 沈为平, 林家浩, 宋华茂. 结构随机响应的并行计算[J]. 振动与冲击, 1995, 54(2): 72-76.
Shen Weiping, Lin Jiahao, Song Huamao. Parallel computing for non-stationary seismic responses of structures[J].

Journal of Vibration and Shock, 1995, 54(2): 72-76.

[9] 李金桥, 于建华. 非线性动力系统精细积分下的显式级数解[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2002, 34(2): 24-27.

Li Jinqiao, Yu Jianhua. Explicit series solution under precise integration for nonlinear dynamics system[J]. Journal of Sichuan University(Engineering Science Edition), 2002, 34(2): 24-27.

[10] Tomasz Kucharski. A method for dynamic response analysis of time-variant discrete systems[J]. Computers and Structures, 2000, 76: 545-550.

《航空动力学报》2007 年改为月刊

经主办单位中国航空学会、主管单位中航一集团及北京新闻出版局的批准,《航空动力学报》将从 2007 年 1 月起改为月刊。

近年来,随着我国航空航天科学领域的迅速发展,本刊的稿件也逐年增加,尽管编辑部每期尽量增加版面,但仍然难以解决稿件积压和作者的论文发表周期较长的问题。

今年 4 月 27 日,《航空动力学报》收到中国航空工业一集团科技发展部转来的北京市新闻出版局批准本刊改为月刊的批文,这对广大作者是一个喜讯,这能缩短论文发表的周期,能让自己的研究成果早日介绍给广大读者。同时,本刊改为月刊,对读者也是一个好消息,能够通过本刊尽快地获得更多的信息。

希望广大作者充分利用《航空动力学报》改月刊这一时机,通过《航空动力学报》这一学术交流的窗口,向国内外的同行介绍自己的研究成果。

《航空动力学报》编辑部